Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространствах голоморфных функций и рациональные функции

О.А.Иванова

Южный Федеральный Университет

Ростов-на-Дону, 2023

Введение

Проблема описания ИП — одна из основных в теории операторов в локально выпуклых пространствах. Она тесно связана со спектральной теорией, а в конечномерном случае, по сути, с ней совпадает.

Основное определение

Определение

Пусть X — линейное пространство. $T : X \to X$ — линейный оператор. Подпространство L пространства X называется инвариантным подпространством оператора T в X (T-инвариантным), если $T(L) \subseteq L$.

ИП в конечномерных пространствах

Пусть L — конечномерное линейное пространство над полем $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Примеры ИП - $\{0\}$, L — тривиальные инвариантные подпространства оператора A — они имеются у любого оператора.

Справедливо следующее (очевидное) предложение:

Предложение

Для любого $\lambda \in F$ множества подпространств, инвариантных относительно A и $A - \lambda I$ совпадают.

Теорема

У любого линейного оператора, действующего в конечномерном комплексном линейном пространстве, существует одномерное инвариантное подпространство.

$\lhd$ Как мы знаем, у оператора, действующего в конечномерном комплексном пространстве, существует хотя бы одно собственное значение λ_0. Значит, существует $x_0 \neq 0$ (собственный вектор) такой, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.
Рассмотрим $l(x_0)$ — линейную оболочку, натянутую на x_0. Это одномерное подпространство в L. Покажем, что оно инвариантно относительно A.
Возьмем произвольный $x \in l(x_0)$, то есть $x = \beta x_0$, $\beta \in \mathbb{C}$. Тогда

$$Ax = A(\beta x_0) = \beta A x_0 = \beta(\lambda_0 x_0) = (\beta\lambda_0)x_0 \in l(x_0). \blacksquare$$

Теорема

Для всякого линейного оператора, действующего в n-мерном комплексном пространстве существует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

◁ Опять же, спектр оператора A непуст. Пусть α_0 и x_0 — собственное значение и собственный вектор оператора A. Рассмотрим оператор $B := A - \alpha_0 I$. Подпространство $KerB$ содержит вектор x_0, так как

$$Bx_0 = (A - \alpha_0 I)x_0 = Ax_0 - \alpha x_0 = 0.$$

А потому $\dim\,(KerB) \geq 1$. Так как $\dim\,KerB + \dim\,ImB = n$, то $\dim\,(ImB) \leq n-1$. Имеем:

$$\dim L = n,\ \dim\,(ImB) \leq n-1.$$

Поэтому существует подпространство $L_1 \subseteq L$:

$$\dim L_1 = n-1,\ ImB \subseteq L_1.$$

Так как ImB —инвариантное подпространство B, то L_1 также инвариантно относительно оператора B, а, значит, в силу предложения выше, и инвариантно относительно оператора A. ■

А что в вещественном случае (в общем случае) ?

Теорема

Любой линейный оператор, действующий в конечномерном вещественном линейном пространстве, имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Сейчас докажем одно общее-частное утверждение и потом используем его в решении конкретной задачи.

Лемма

Пусть L — трехмерное линейное пространство над полем F, линейный оператор $A : L \to L$ имеет три различных собственных значения; e_1, e_2, e_3 — соответствующие им собственные векторы. Тогда собственными A-инвариантными подпространствами L являются $l(e_1)$, $l(e_2)$, $l(e_3)$, $l(e_1, e_2)$, $l(e_1, e_3)$, $l(e_2, e_3)$ (и только они).

$\lhd$Будем использовать следующее:

(i) система $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейно независимая, а значит, образует базис в L;

(ii) если x_0 — собственный вектор A, то существует $\lambda \neq 0$ такое, что $x_0 = \lambda e_1$ или $x_0 = \lambda e_2$ или $x_0 = \lambda e_3$.

Ясно, что выписанные в условии леммы шесть подпространств A-инвариантные.
Пусть A-инвариантное подпространство H одномерно. Тогда H содержит собственный вектор, а, значит, один из векторов e_1, e_2, e_3. Значит, H совпадает с одним из подпространств $l(e_1)$, $l(e_2)$, $l(e_3)$.
Пусть H — A-инвариантное подпространство L размерности 2. Положим

$$H_1 := H \cap l(e_1, e_2).$$

Предположим, что $H_1 = \{0\}$. Пусть $\{a, b\}$ — базис в H и для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ из поля F выполняется равенство

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = -\lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2 =: v$$

и $v \in H_1$. Значит, $v = 0$, откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Поэтому система $\{a, b, e_1, e_2\}$ линейно независимая. Получили противоречие, ведь L — трехмерное линейное пространство. Значит, H_1 — одномерное или двумерное.
Пусть H_1 одномерно. Так как $A(H_1) \subseteq H_1$, то H_1 содержит собственный вектор A, лежащий в $l(e_1, e_2)$. Это не вектор вида αe_3, $\alpha \neq 0$.
Следовательно, H_1 содержит e_1 или e_2. Пусть e_1.

Рассмотрим теперь

$$H_2 := H \cap l(e_2, e_3).$$

H_2 не может быть двумерным, так как тогда $H_2 = H = l(e_2, e_3)$, а значит, $e_1, e_2, e_3 \in H$. Тогда $H = L$. H_2 по предыдущему не равно $\{0\}$. Значит, подпространство H_2 одномерно. Поэтому H_2 содержит e_2 или e_3. Пусть e_2. Тогда H содержит e_1 и e_2, а значит, $H = l(e_1, e_2)$.
Если H_1 двумерно, то

$$H_1 = H = l(e_1, e_2). \blacksquare$$

Пример

Найти все инвариантные подпространства оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$ Характеристический многочлен оператора A: $\varphi_A(\lambda) =$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(1-\lambda).$$

Все собственные значения оператора различны.

Решив системы уравнений

$$(Ax - \lambda_i I)x = 0, \ i = 1, 2, 3,$$

найдем собственные векторы:

- для $\lambda = 1$ собственные векторы имеют вид αe_1, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $e_1 = (1, 1, 1)^t$,
- для $\lambda = 2$ — вид αe_2, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $e_2 = (1, 0, 1)^t$,
- для $\lambda = 3$ — вид αe_3, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $e_3 = (1, 1, 0)^t$

и других собственных векторов у оператора нет.
С учетом леммы подпространства

$$\{0\}, \mathbb{R}^3, l(e_1), l(e_2), l(e_3), l(e_1, e_2), l(e_1, e_3), l(e_2, e_3) -$$

все инвариантные подпространства оператора A. ■

Можно доказать утверждение более общее, чем лемма на слайде 8.

Предложение

Пусть L — конечномерное пространство; A — линейный оператор в L. Если L имеет базис, состоящий из собственных векторов A, то любое собственное A-инвариантное подпространство L является линейной оболочкой некоторой системы этих (не всех) собственных векторов A.

Пример

Приведем пример оператора, не имеющего собственных инвариантных подпространств. Пусть E^2 — двумерное вещественное евклидово пространство. Любое нетривиальное подпространство $L \subset E^2$ — множество вида

$$L = \{x \in E^2 : x = \alpha e, 0 \neq e \in L, \alpha \in \mathbb{R}\},$$

то есть L — прямая на двумерной плоскости, проходящая через начало координат параллельно фиксированному вектору $e \in L$. Введем в E^2 ортонормированный базис e_1, e_2. Пусть $Q : E^2 \to E^2$ — оператор, отображающий каждый вектор $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ в вектор $y = -\xi_2 e_1 + \xi_1 e_2$. Ясно, что векторы x и y ортогональны. Если $x \neq 0$, то также $Q(x) \neq 0$. Пусть L — нетривиальное инвариантное подпространство E^2. Тогда для $x \in L$ получим, что вектор Qx принадлежит $L^\perp$ и, следовательно, $Qx \notin L$, если $x \neq 0$.

В примере на слайде 11 A-инвариантные подпространства не являются упорядоченными по вложению. Такая упорядоченность имеет место, если A имеет специальную структуру. Например, как ниже.

Приведем пример.

Пример

Найдем инвариантные подпространства оператора

$$A(x) = A \cdot x$$

в $\mathbb{C}^3$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\triangleleft$Пусть L — одномерное инвариантное подпространство, $\{a\}$ — базис L. Так как $A(a) \in L$, то существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $A(a) = \lambda a$. Значит, λ — собственное значение матрицы A. Поэтому $\lambda = 0$ и $a = \beta(1,0,0)^t$, $\beta \neq 0$. Таким образом, $L = \{\alpha(1,0,0)^t : \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\}$.

Пусть L — двумерное инвариантное подпространство A;

$$\left\{a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\} -$$

базис L. Предположим, что $a_3 \neq 0$ или $b_3 \neq 0$ (пусть $a_3 \neq 0$). Векторы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, A(a) = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2(a) = \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

принадлежат L и система $\{a, A(a), A^2(a)\}$ линейно независимая. Это противоречит тому, $\dim L = 2$. Значит, $a_3 = b_3 = 0$. Поэтому

$$L \subseteq H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Подпространство H двумерное, L тоже двумерное. Значит, $L = H$ (и действительно, $A(H) \subseteq H$). Итак,

$$\{0\}, \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\}, \mathbb{C}^3 -$$

все инвариантные подпространства A. ■

Замечание

Рассмотрим в $\mathbb{C}[z]_2$ (пространстве многочленов степени не выше 2 над полем $\mathbb{C}$) оператор обратного сдвига

$$D_0(f)(z) := \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Его матрица в базисе $\{1, z, z^2\}$ такая, как в предыдущем примере. Действительно,

$$D_0(1) = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3,$$

$$D_0(z) = 1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3,$$

$$D_0(z^2) = \frac{z^2 - 0}{z} = z = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3.$$

Из предыдущего следует, что $\{0\}$, $\mathbb{C}[z]_0$ $\mathbb{C}[z]_1$, $\mathbb{C}[z]_2$ — все инвариантные подпространства D_0 в $\mathbb{C}[z]_2$.

Это замечание — „мостик“ к основной теме.

О некоторых общих результатах

Дальше пойдет речь об ИП линейных непрерывных операторов, действующих в линейных пространствах с топологией.

Про оператор Вольтерра

И.М.Гельфанд (1938): Пусть

$$J_0(f)(t) := \int_0^t f(s)ds,$$

J_0 — линейный непрерывный оператор в $L_2[0,1]$. При каких условиях линейная оболочка системы

$$\{f, J_0(f), J_0^2(f), J_0^3(f), \cdots\}$$

плотна в $L_2[0,1]$? Другими словами, когда f — циклический вектор оператора J_0 в $L_2[0,1]$?

Ответ получен М.С.Бродским [1], В.Донахью [2], Л.А.Сахновичем.[3]

[1] М.С. Бродский. Об одной задаче И.М.Гельфанда. Успехи математических наук. 1957. Т. 12, В. 2 (74). С. 129–132.

[2] Donoghue W . F. Jr., The lattice of invariant subspacesof completely continuous quasinilpotent transformation, Pacific J. Math., 7, № 2 (1957), 1031-1035.

[3] Сахнович Л. А., Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи, Докл. АН СССР, 115, № 4 (1957), 666—669.

Имеет место

Теорема

$f \in L_2[0,1]$ — циклический вектор J_0 в $L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in (0,1]$ мера множества $\{x \in [0,\alpha] : f(x) \neq 0\}$ больше 0.

Отсюда следует

Теорема

J_0-инвариантными собственными замкнутыми подпространствами $L_2[0,1]$ являются

$$H_\alpha := \{f \in L_2[0,1] : \ f = 0 \text{ п.в. на } [0,\alpha]\},$$

где $\alpha \in (0,1)$, и только они.

О связи циклических векторов и ИП — позже.

Статья М.С.Бродского послужила основой такого определения.

Определение

Пусть E — локально выпуклое пространство, A — линейный непрерывный оператор в E. Оператор A называется одноклеточным, если семейство $\mathrm{Lat}(A)$ всех замкнутых A-инвариантных подпространств E образует цепь, то есть линейно упорядочено по вложению: для любых $H_1, H_2 \in \mathrm{Lat}(A)$ $H_1 \subseteq H_2$ или $H_2 \subseteq H_1$.

Любое подпространство конечномерного пространства с какой-либо локально выпуклой топологией замкнуто. Поэтому (в этих терминах) в приведенном раньше примере на слайде 19 оператор A — одноклеточный оператор.

Происхождение термина „одноклеточный“ объясняет следующее

Замечание

Если L — комплексное конечномерное локально выпуклое пространство, то линейный оператор A в L является одноклеточным тогда и только тогда, когда жорданова нормальная форма матрицы A (в некотором базисе) состоит из одной клетки.

В примере на слайде 19 матрица A имеет ЖНФ.

Другие результаты

Теорема

(Н.Ароншайн, К.Смит) Пусть E *— комплексное банахово пространство. Для любого компактного оператора* A *в* E *существует собственное замкнутое* A*-инвариантное подпространство* E*.*

При доказательстве используются конструкции, связанные с проекциями банахова пространства на конечномерные подпространства.
Позже этот результат был усилен.

Для линейного непрерывного оператора A в локально выпуклом пространстве E пусть $\{A\}'$ — коммутант A в алгебре $\mathcal{L}(E)$ всех линейных непрерывных в E операторов, то есть

$$\{A\}' := \{B \in \mathcal{L}(E) : \ AB = BA \text{ на } E\}.$$

Теорема

(В.И.Ломоносов [a]) Пусть E — бесконечномерное комплексное банахово пространство. Для любого компактного оператора A в $\mathcal{L}(E)$ существует собственное замкнутое подпространство H пространства E, инвариантное относительно каждого оператора $B \in \{A\}'$.

[a] В.И.Ломоносов. Функциональный анализ и его приложения. 1973. Т.7. В.3. С.55-56.

Доказательство использует теорему Шаудера о неподвижной точке.
Теорема Шаудера. Пусть V — отделимое топологическое векторное пространство, K — замкнутое ограниченное выпуклое подмножество V. Если $f : K \to K$ непрерывно и $f(K)$ — компактное подмножество K, то f имеет в K неподвижную точку.

В связи с этим определение.

Определение

Подпространство H пространства E называется гиперинвариантным подпространством оператора $A \in \mathcal{L}(E)$, если H инвариантно относительно $\forall B \in \{A\}'$.

Верна ли теорема Ломоносова в конечномерном случае?

Теорема

Пусть E — конечномерное комплексное банахово пространство. Оператор $A \in \mathcal{L}(E)$ имеет собственное замкнутое гиперинвариантное подпространство E тогда и только тогда, когда A не является оператором вида λI, где $\lambda \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор.

Справедлив результат типа „контрпримера“.

Теорема

(Рид [a]) Существует оператор $A \in \mathcal{L}(l_1)$, не имеющий собственных замкнутых инвариантных подпространств. При этом

$$l_1 := \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{C} : \ \|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < +\infty\}.$$

[a] Read C.J. A short prof concerning the invariant subspace problem // J. London Math. Soc. 1986. V. 34, № 2. P. 335-348.

Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, то есть открытое линейно связное подмножество $\mathbb{C}$;
$H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций.
В $H(\Omega)$ вводится топология равномерной сходимости на компактных подмножествах Ω.
Выберем последовательность компактов $\Omega_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, такую, что

$$\Omega_n \subseteq \mathrm{int}\Omega_{n+1},\;\; \Omega = \bigcup_n \Omega_n$$

(она существует).
Можно считать, что $\partial\Omega_n$ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая и $\mathrm{int}\ \Omega_n$ — односвязная область.
Топология $H(\Omega)$ задается последовательностью преднорм

$$\|f\|_n := \max_{z\in\Omega_n} |f(z)|,\;\; n \in \mathbb{N}.$$

$H(\Omega)$ — полное метрическое пространство. При этом

$$f_n \to f \text{ в } H(\Omega) \Leftrightarrow \max_{z\in\Omega_k} |f_n(z) - f(z)| \to 0, n \to \infty, \forall k \in N.$$

Как описать множество всех линейных непрерывных функционалов на $H(\Omega)$, то есть $H(\Omega)'$?

Ответ дает **теорема Силвы-Кёте-Гротендика:**

Пусть $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ — пространство всех голоморфных на $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ функций g таких, что $g(\infty) = 0$; $\mathrm{Ext} C$ — внешность замкнутой жордановой кривой C.

Теорема

(i) *Для* $\forall \varphi \in H(\Omega)'$ $\exists!$ $g \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ *такая, что* $\forall f \in H(\Omega)$

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) g(z) dz,$$

где C *— замкнутая спрямляемая жорданова кривая в* Ω*, для которой* g *голоморфна в некоторой области, содержащей* $\mathrm{Ext} C \cup C$*.*

(ii) $\forall g \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ *функционал в (i) линеен и непрерывен на* $H(\Omega)$*.*

О доказательстве. Про (i): Пусть задано $\varphi \in H(\Omega)'$. Тогда $\exists n\ \exists B$:

$$|\varphi(f)| \leq B \sup_{t \in \mathrm{int}\ \Omega_n} |f(t)|.$$

Пусть $H_\infty(\mathrm{int}\Omega_n)$ — пространство всех ограниченных голоморфных в Ω_n функций с $\sup$-нормой $\sup\limits_{t \in \mathrm{int}\Omega_n} |f(t)|$.
Можно считать, что $H(\Omega) \subseteq H_\infty(\mathrm{int}\Omega_n)$.
По теореме Хана-Банаха φ можно продолжить до линейного непрерывного функционала на $H_\infty(\mathrm{int}\Omega_n)$.
Полагаем

$$g(z) := \varphi_t\Big(\frac{1}{z-t}\Big),\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_n$$

(по t функция $\frac{1}{z-t}$ голоморфна в $\mathrm{int}\Omega_n$ и ограничена там.)
Тогда

$$\varphi(f) = \varphi_t(f(t)) = \varphi_t\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-t}dz\Big) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\varphi_t\Big(\frac{1}{z-t}\Big)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)g(z)dz.$$

(контур C содержит внутри себя Ω_n и содержится в Ω).

Уже приведенная выдержка из доказательства теоремы Силвы-Кёте-Гротендика показывает важность элементарных дробей $\frac{1}{z-t}$.

Операторы обратного сдвига

Определим основной оператор для дальнейшего.

Определение

Для $f \in H(\Omega)$

$$D_0(f)(t) := \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

(D_0 называется также оператором Поммье.)

$D_0(f)(0)$ определяется естественным образом:

$$D_0(f)(0) = f'(0).$$

Оператор D_0 линейно действует в $H(\Omega)$.

Лемма

$D_0 : H(\Omega) \to H(\Omega)$ *непрерывен.*

$\triangleleft$ (Считаем, что $0 \in \Omega_1$). Можно доказать непосредственно, то есть, что

$$\forall k \ \exists n \ \exists B : \ \forall f \in H(\Omega)$$

$$\max_{t \in \Omega_n} |D_0(f)(t)| \le B \max_{t \in \Omega_k} |f(t)|.$$

Действительно, зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\max_{t \in \Omega_n} \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| = \max_{t \in \partial\Omega_n} \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\rho(0, \partial\Omega_n)} \max_{t \in \partial\Omega_n} (|f(t)| + |f(0)|) \le \frac{2}{\rho(0, \partial\Omega_n)} \max_{t \in \Omega_n} |f(t)|.$$

(то есть можно взять $k := n$).

А можно и без оценок — с помощью теоремы о замкнутом графике: $f_n \to 0$ в $H(\Omega)$, $D_0(f_n) \to g$ в $H(\Omega)$. Тогда поточечно (для $t \neq 0$)

$$D_0(f_n)(t) = \frac{f_n(t) - f_n(0)}{t} \to 0.$$

Значит

$$g(t) = 0, \ t \in \Omega \setminus \{0\},$$

то есть $g \equiv 0$.
Значит, график оператора $D_0 : H(\Omega) \to H(\Omega)$ замкнут. Поэтому оператор D_0 непрерывен. ■

Речь пойдет о следующей задаче:

Описать все собственные замкнутые инвариантные подпространства оператора D_0 в $H(\Omega)$.

Действие многочленов от оператора обратного сдвига на рациональные функции

Введем элементарные дроби:

$$q_{\lambda,n}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^n}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}, t \neq \lambda.$$

Далее

$$H_0 := H(\{0\})-$$

пространство (ростков) всех функций, голоморфных в некоторой окрестности 0;

$$H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})-$$

пространство всех голоморфных в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ функций h таких, что $h(\infty) = 0$.

В H_0 можно ввести естественную топологию. Тогда топологическое сопряженное к H_0 можно отождествить с $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ (это тоже по теореме Силвы-Кете-Гротендика).

Полагаем

$$\langle f, h\rangle := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon} f(t)h(t)dt,$$

(здесь функция h голоморфна в $\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ и $h(\infty)=0$, ε выбирается так, чтобы функция f была голоморфной в некоторой области, содержащей круг $|t|\le\varepsilon$, а окружность $|t|=\varepsilon$ обходится против часовой стрелки.)

Билинейная форма

$$\langle f, h\rangle := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon} f(t)h(t)dt$$

устанавливает двойственность между H_0 и $H_0(\bar{\mathbb{C}}\setminus\{0\})$.

Нам понадобится сопряженный D_0' к оператору $D_0 : H_0 \to H_0$, действущий из $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ в $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$.
D_0' определяется, как обычно:

$$\langle D_0(f), g\rangle = \langle f, D_0'(g)\rangle.$$

Отметим: для $h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$

$$h(\lambda) = \langle \frac{1}{t-\lambda}, h(t)\rangle$$

(ниже докажем более общую формулу).

Для $f(t) = \frac{1}{t-\lambda}$, $\lambda \neq 0$ получим:

$$D_0'(h)(\lambda) = \langle \frac{1}{t-\lambda}, D_0'(h)(t)\rangle = \langle D_0(\frac{1}{t-\lambda})(t), h(t)\rangle =$$

$$= \langle \frac{1}{\lambda}\frac{1}{t-\lambda}, h(t)\rangle = \frac{1}{\lambda}h(\lambda).$$

Свойства оператора D_0

Свойство 1. Для $h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ справедливо

$$\langle q_{\lambda,k}, h\rangle = \frac{h^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!},\ \lambda \neq 0,\ k \geq 1.$$

$\lhd$

$$\langle q_{\lambda,k}, h\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{h(t)}{(t-\lambda)^k}dt =$$

$$\frac{1}{(k-1)!}\Big(-\frac{(k-1)!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{h(t)}{(t-\lambda)^k}dt\Big) = \frac{1}{(k-1)!}h^{(k-1)}(\lambda)$$

(по формуле Коши для неограниченной области).
Если $k=1$, то

$$\langle q_{\lambda,1}, h\rangle = h(\lambda),$$

то есть

$$\langle\frac{1}{t-\lambda}, h(t)\rangle = h(\lambda). \blacksquare$$

Свойство 2. Для $\lambda \neq 0$ функции

$$\frac{C}{t-\lambda},\ C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -$$

все собственные векторы оператора D_0 в H_0, соответствующие $\frac{1}{\lambda}$.

$\triangleleft$Прежде всего,

$$D_0\Big(\frac{1}{t-\lambda}\Big)(t) = \frac{\frac{1}{t-\lambda} + \frac{1}{\lambda}}{t} = \frac{\lambda + t - \lambda}{(t-\lambda)\lambda t} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{t-\lambda}.$$

Пусть $D_0(f)(t) = \frac{1}{\lambda}f(t)$, то есть

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{\lambda}f(t).$$

Тогда

$$f(t) - f(0) = \frac{1}{\lambda}tf(t)$$

и

$$f(t)\Big(1 - \frac{t}{\lambda}\Big) = f(0),$$

а значит,

$$f(t) = \frac{-f(0)\lambda}{t-\lambda}. \blacksquare$$

Свойство 3. $\text{Ker } D_0^n = \mathbb{C}[z]_{n-1}$, $n \geq 1$.

$\lhd$При $n = 1$:

$$D_0(f) = 0 \iff \frac{f(t) - f(0)}{t} = 0, t \neq 0 \iff f \equiv f(0).$$

Отсюда следует, что $\text{Ker } D_0 \subset \mathbb{C}[z]_0$ — все константы.

Наоборот: ясно.

Для $n = 2$ (а в общем случае по индукции):

$D_0^2(f) = 0 \iff D_0(D_0(f)) = 0 \iff$

$$\exists C : D_0(f)(t) = C, \forall t \iff \frac{f(t) - f(0)}{t} = C \Leftrightarrow f(t) = Ct + f(0). \blacksquare$$

Свойство 4. Для любых $\lambda, \mu \neq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\Big(D_0 - \frac{1}{\mu} I\Big)(q_{\lambda,k}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_{\lambda,j},$$

причем $\alpha_k \neq 0$, если $\mu \neq \lambda$.

$\lhd$Для любой функции $h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ верно

$$\langle \Big(D_0 - \frac{1}{\mu} I\Big)(q_{\lambda,k}), h\rangle = \langle q_{\lambda,k}, \Big(D_0 - \frac{1}{\mu} I\Big)'(h)\rangle =$$

$$= \langle q_{\lambda,k}(t), (\frac{1}{t} - \frac{1}{\mu})h(t) >=$$

$$= \langle q_{\lambda,k}(t), \frac{1}{t} h(t)\rangle - \frac{1}{\mu}\langle q_{\lambda,k}(t), h(t)\rangle =$$

$$= \langle q_{\lambda,k}(t), h_1(t)\rangle - \frac{1}{\mu}\langle q_{\lambda,k}(t), h(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} h_1^{(k-1)}(\lambda) - \frac{1}{\mu}\langle q_{\lambda,k}, h\rangle.$$

Имеем:

$$h_1^{(k-1)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j h^{(j)}(\lambda) \frac{(-1)^{k-1-j}(k-1-j)!}{\lambda^{k-j}}.$$

Тогда

$$\langle \Big(D_0 - \frac{1}{\mu} I\Big)(q_{\lambda,k}), h\rangle =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j h^{(j)}(\lambda) \frac{(-1)^{k-1-j}(k-1-j)!}{\lambda^{k-j}} - \frac{1}{\mu}\langle q_{\lambda,k}, h\rangle =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \frac{(-1)^{k-1-j}(k-1-j)!j!}{\lambda^{k-j}} \cdot \langle q_{\lambda,j+1}, h\rangle - \frac{1}{\mu}\langle q_{\lambda,k}, h\rangle.$$

Поэтому (ведь $h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ произвольная)

$$\left(D_0 - \frac{1}{\mu} I\right)(q_{\lambda,k}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q_{\lambda,j}.$$

При этом

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}.$$

Если $\lambda \neq \mu$, то $\alpha_k \neq 0$.

Если $1 \leq j \leq k-1$, то (в последней сумме нужно брать слагаемое, соответствующее индексу $j-1$)

$$\alpha_j = \frac{1}{(k-1)!} \frac{(k-1)!(j-1)!(k-j)!}{(j-1)!(k-j)!} (-1)^{k-j} \frac{1}{\lambda^{k+1-j}} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-j}}{\lambda^{k+1-j}}. \blacksquare$$

Введем для $\lambda \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$Q(\lambda, k) := l(q_{\lambda,j} : 1 \leq j \leq k),$$

то есть $Q(\lambda, k)$ состоит из всех функций вида

$$\frac{c_1}{t-\lambda} + \frac{c_2}{(t-\lambda)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(t-\lambda)^k}, \ c_j \in \mathbb{C}.$$

Свойство 5 (об инвариантности $Q(\lambda, k)$). Для любых $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, k \in \mathbb{N}$

$$(D_0 - \frac{1}{\mu} I)(Q(\lambda, k)) \subseteq Q(\lambda, k).$$

Если при этом $\lambda \neq \mu$, $f \in Q(\lambda, k)$, $f \neq 0$, то $(D_0 - \frac{1}{\mu} I)(f) \neq 0$.

$\lhd$ Это следствие свойства 4.
Действительно, из свойства 4 вытекает, что для $1 \leq j \leq k$

$$(D_0 - \frac{1}{\mu} I)(q_{\lambda, j}) \in Q(\lambda, j) \subseteq Q(\lambda, k). \ \blacksquare$$

Свойство 6. Справедливо равенство

$$(D_0 - \frac{1}{\lambda}I)^n(q_{\lambda,n}) = 0,\ \forall\lambda \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

(это означает, что $q_{\lambda,n}$ — корневой вектор оператора D_0).

◁ Воспользуемся двойственностью между H_0 и $H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$:

$$\forall h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}),\ \forall\varepsilon \in (0, |\lambda|)$$

$$\langle (D_0 - \frac{1}{\lambda}I)^n(q_{\lambda,n}), h\rangle = \langle q_{\lambda,n}, ((D_0 - \frac{1}{\lambda}I)^n)'(h)\rangle =$$

$$= \langle q_{\lambda,n}, ((D_0 - \frac{1}{\lambda}I)')^n(h)\rangle = \langle q_{\lambda,n}(t), (\frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda})^n h(t)\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{1}{(t-\lambda)^n}(\frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda})^n h(t)dt = \frac{1}{2\pi i}(-1)^{n+1}\frac{1}{\lambda^n}\int\limits_{|t|=\varepsilon}\frac{h(t)}{t^n}dt = 0,$$

откуда

$$(D_0 - \frac{1}{\lambda}I)^n(q_{\lambda,n}) = 0. \blacksquare$$

Здесь использовали:

(i) $(D_0 - \alpha I)'(h)(t) = D_0'(h)(t) - \alpha I'(h)(t) =$

$$= \frac{1}{t}h(t) - \alpha h(t) = (\frac{1}{t} - \alpha)h(t).$$

(ii) Если $h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, то $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1$

$$\int\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{h(t)}{t^n} dt = 0.$$

◁Поскольку

$$h(t) = \frac{c_{-1}}{t} + \frac{c_{-2}}{t^2} + \cdots, \ |t| > 0$$

($c_k = 0$, $k \geq 0$, вследствие того, что ∞ — устранимая особая точка функции h и $h(\infty) = 0$). Тогда

$$\frac{h(t)}{t^n} = \frac{c_{-1}}{t^{n+1}} + \frac{c_{-2}}{t^{n+2}} + \cdots$$

и

$$\int\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{h(t)}{t^n} dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \int\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{dt}{t^{n+k}} = 0$$

(ведь $n + k \geq 2$).

Напоминание:

$$\int\limits_{|t|=\varepsilon} \frac{dt}{t^m} = \begin{cases} 2\pi i, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

■

Свойство 7 (о „просеивании“: линейная комбинация дробей переходит в одну фиксированную дробь). $\forall\lambda \neq 0$, $\forall k, m \in \mathbb{N}$: $1 \le m \le k$, $\forall b_r \in \mathbb{C}$, $1 \le r \le k$, $b_k \neq 0$, для

$$R = \sum_{r=1}^{k} b_r q_{\lambda,r} \ \exists A = \sum_{j=0}^{k-1} a_j D_0^j : \ A(R) = q_{\lambda,m}.$$

$\lhd$Нужно показать, что

$$R(t) = \frac{b_1}{t-\lambda} + \frac{b_2}{(t-\lambda)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(t-\lambda)^k} \ (b_k \neq 0)$$

посредством некоторого многочлена от оператора D_0 отобразится в дробь

$$\frac{1}{(t-\lambda)^m}.$$

Равенство $A(R) = q_{\lambda,m}$ равносильно тому, что

$$\langle A(R), h\rangle = \langle q_{\lambda,m}, h\rangle, \ \forall h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}),$$

то есть тому, что $\forall h \in H_0(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \langle A(q_{\lambda,r}), h\rangle = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}.$$

Оператор A имеет вид:

$$A=\sum_{j=0}^{k-1} a_j D_0^j.$$

Получим:

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \sum_{j=0}^{k-1} a_j \langle D_0^j(q_{\lambda,r}), h\rangle = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!},$$

то есть

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \sum_{j=0}^{k-1} a_j \langle q_{\lambda,r}, (D_0')^j(h)\rangle = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!};$$

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \sum_{j=0}^{k-1} a_j \langle q_{\lambda,r}, \frac{h(t)}{t^j}\rangle = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!};$$

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{\left(\frac{h(t)}{t^j}\right)^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!};$$

$$\sum_{r=1}^{k} b_r \frac{1}{(r-1)!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{t^j} h(t)\Big)^{(r-1)}(\lambda) = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}.$$

Введем функцию

$$w(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{t^j}.$$

Тогда последнее равенство примет вид:

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{b_r}{(r-1)!}(wh)^{(r-1)}(\lambda) = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}.$$

Используя формулу Лейбница, преобразуем левую часть:

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{b_{r+1}}{r!} \sum_{s=0}^{r} C_r^s w^{(r-s)}(\lambda) h^{(s)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} h^{(s)}(\lambda) \sum_{r=s}^{k-1} \frac{b_{r+1}}{r!} C_r^s w^{(r-s)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} h^{(s)}(\lambda) \sum_{r=0}^{k-1-s} \frac{b_{r+1+s}}{(r+s)!} C_{r+s}^s w^{(r)}(\lambda).$$

Таким образом, получили равенство

$$\sum_{s=0}^{k-1} h^{(s)}(\lambda) \sum_{r=0}^{k-1-s} \frac{b_{r+1+s}}{(r+s)!} C_{r+s}^s w^{(r)}(\lambda) = \frac{h^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}.$$

Это равенство выполняется, если слева все коэффициенты при $h^{(s)}(\lambda)$ равны 0, если $s \neq m-1$, а при $h^{(m-1)}$ коэффициент равен $\frac{1}{(m-1)!}$. Получим систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{k-1-s} \frac{b_{r+1+s}}{(r+s)!} C_{r+s}^{s} x_r = 0, \ 0 \leq s \leq k-1, \ s \neq m-1, \\ \sum\limits_{r=0}^{k-m} \frac{b_{r+m}}{(r+m-1)!} C_{r+m-1}^{m-1} x_r = \frac{1}{(m-1)!} \end{cases}$$

Здесь k уравнений с неизвестными x_r, $0 \leq r \leq k-1$.
Выпишем эти уравнения, начиная с $s = k-1$:

$$\begin{cases} C_{k-1}^{k-1} \frac{b_k}{(k-1)!} x_0 = 0 \\ C_{k-2}^{k-2} \frac{b_{k-1}}{(k-2)!} x_0 + C_{k-1}^{k-2} \frac{b_k}{(k-1)!} x_1 = 0 \\ \ldots \\ C_{m-1}^{m-1} \frac{b_m}{(m-1)!} x_0 + \cdots + C_{k-1}^{m-1} \frac{b_k}{(k-1)!} x_{k-m} = \frac{1}{(m-1)!} \\ \ldots \\ C_0^0 \frac{b_1}{0!} x_0 + \cdots + C_{k-1}^{0} \frac{b_k}{(k-1)!} x_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Матрица последней системы такая:

$$\begin{pmatrix} C_{k-1}^{k-1}\frac{b_k}{(k-1)!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{k-2}^{k-2}\frac{b_{k-1}}{(k-2)!} & C_{k-1}^{k-2}\frac{b_k}{(k-1)!} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_0^0\frac{b_1}{0!}x_0 & \cdots & \cdots & \cdots & C_{k-1}^0\frac{b_k}{(k-1)!} \end{pmatrix}.$$

При этом $b_k \neq 0$. Значит, система имеет (единственное) решение $x_0, x_1, \cdots x_{k-1}$.

Найдем теперь функцию

$$w(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{t^j},$$

(то есть ее коэффициенты a_j) такую, что

$$w^{(s)}(\lambda) = x_s,\ 0 \le s \le k-1.$$

Это можно сделать так. Преобразуем $w(t)$:

$$w(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{t^j} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} a_j t^{k-1-j}}{t^{k-1}} = \frac{v(t)}{t^{k-1}},\ t \neq 0.$$

Равенства $w^{(s)}(\lambda) = x_s$, $0 \le s \le k-1$, равносильны равенствам

$$\sum_{p=0}^{s} C_s^p (-1)^s \frac{(k+p)!}{p!} \frac{1}{\lambda^{k+p+1}} v^{(s-p)}(\lambda) = x_s, \ 0 \le s \le k-1.$$

Найдем <u>числа</u>

$$v^{(r)}(\lambda), \ 0 \le r \le k-1,$$

удовлетворяющие последней системе (она с треугольной невырожденной матрицей).

После этого определим <u>многочлен</u> $v(t)$ с такими производными в точке λ (как многочлен Тейлора):

$$v(t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{v^{(r)}(\lambda)}{r!} (t-\lambda)^r,$$

а значит, и все числа a_r, $0 \le r \le k-1$. Свойство 7 доказано. ■

Далее Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, $0 \in \Omega$;
$\mathbb{C}(z)$ — множество всех рациональных функций.

Проблема описания инвариантных подпространств тесно связана с проблемой описания циклических векторов.

Циклические векторы оператора D_0

Определение

Пусть E — локально выпуклое пространство, A — линейный непрерывный в E оператор. Элемент $x \in E$ называется циклическим вектором оператора A в E, если замыкание линейной оболочки системы $\{x, A(x), A^2(x), \cdots\}$ (орбиты x) равно E.

Пример

В пространстве $C[a,b]$ функция $f(x) \equiv 1$ — циклический вектор оператора умножения на независимую переменную $M(g)(x) := xg(x)$.
Действительно, $M^n(f)(x) = x^n$, $n \geq 0$, и по теореме Вейерштрасса система $\{x^n : n \geq 0\}$ полна в $C[a,b]$.

Пример

В пространстве $H(\Omega)$ функция $f(x) \equiv 1$ — циклический вектор оператора умножения на независимую переменную, если область Ω односвязная.
Действительно, по теореме Рунге множество многочленов плотно в $H(\Omega)$.

Теорема

Пусть $E \neq \{0\}$. Элемент $x \in E \setminus \{0\}$ является циклическим вектором оператора A тогда и только тогда, когда x не принадлежит ни одному собственному замкнутому A-инвариантному подпространству E.

◁**Необходимость.** Пусть x — циклический вектор.
Предположим, что существует H — собственное замкнутое A-инвариантное подпространство E — такое, что $x \in H$.
Тогда

$$A^n(x) \in H,\ \forall n \geq 0.$$

Значит,

$$\overline{l(A^n(x) : n \geq 0)} \subseteq H,$$

а $H \neq E$ (ведь H — собственное подпространство). Поэтому x не является циклическим вектором A. Получено противоречие.

Достаточность. Пусть x не принадлежит ни одному собственному замкнутому A-инвариантному подпространству.
Положим
$$H(x) := \overline{l(A^n(x) : n \geq 0)}.$$
Тогда $H(x)$ — замкнутое A-инвариантное подпространство E.
Поскольку $x \in H(x)$, то $H(x)$ не является собственным подпространством E.
Значит, $H(x) = \{0\}$ или $H(x) = E$. Так как $x \neq 0$, то $H(x) \neq \{0\}$.
Поэтому $H(x) = E$ и x — циклический вектор оператора A в E. ■

Нам понадобится

Теорема

(о циклических элементах D_0 в $H(\Omega)$). *Пусть $f \in H(\Omega)$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) f *— циклический вектор* D_0 *в* $H(\Omega)$.

(ii) $f \notin \mathbb{C}(z)$.

Эта теорема доказана первоначально Ю.А.Казьминым [4]. Ее доказательство использует свойства контурных интегралов (интегралов по контурам). Другой метод позже использовался в статье Н.Е.Линчук [5] (применялись операторы, перестановочные с D_0 в $H(\Omega)$).

[4] Казьмин Ю.А., "О последовательных остатках ряда Тейлора"// Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, Механика. 1963. №5. С. 35-46.

[5] Линчук Н. Е. *Представление коммутантов оператора Поммье и их приложения*, Матем. заметки, 44:6 (1988), 794–802.

Вообще, в 50-70-е годы прошлого века большой популярностью в комплексном анализе пользовались задачи о полноте различных систем в пространствах аналитических функций и в других функциональных пространствах. Например, систем

$$\{f^{(n)(z)}\}_{n\geq 0},$$

$$\{f(z+\alpha_n)\}_{n\geq 1},$$

$$\{z^n+\lambda f_n(z)\}_{n\geq 0},$$

систем экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n\geq 1}$.

Следствие

(для $\Omega = \mathbb{C}$)
f — циклический вектор D_0 в $H(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда f не является многочленом (то есть f — трансцендентная целая функция).

Пояснение. f — циклический вектор в $H(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда f не является рациональной функцией, то есть f не представима в виде $f = \frac{P}{Q}$, где P, Q — многочлены, без ограничения общности, не имеющие общих корней.

Какие целые функции имеют вид $\frac{P}{Q}$? $\frac{P}{Q}$ такая целая тогда и только тогда, когда $Q = const$. Итак, множество таких дробей — $\mathbb{C}[z]$.

Итак, любое собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство S пространства $H(\Omega)$ не может содержать ни одной функции из $H(\Omega)$, отличной от рациональной, то есть

$$S \subseteq \mathbb{C}(z).$$

Поэтому далее будут рассматриваться только подпространства, содержащиеся в $\mathbb{C}(z)$.

Это позволяет „алгебраизировать“ проблему описания D_0-инвариантных подпространств.

Пусть $\mathbb{C}_{\Omega}^{-}(z)$ — множество всех правильных рациональных дробей, голоморфных в Ω. Тогда

$$\mathbb{C}_{\Omega}^{-}(z) = l(q_{\lambda,n} : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega, n \in \mathbb{N}).$$

Символ $\mathbb{C}[D_0]$ обозначает множество операторов вида

$$a_n D_0^n + a_{n-1} D_0^{n-1} + \cdots + a_1 D_0 + a_0 I$$

(то есть множество многочленов от оператора D_0).

Лемма

(об отбрасывании особенностей). *Пусть* $\Omega \neq \mathbb{C}$, $f = r + h$, *где* r *— ненулевой многочлен, а* $h \in \mathbb{C}_\Omega^-(z)$. *Тогда существует оператор* $A \in \mathbb{C}[D_0]$ *такой, что* $A(f)$ *— многочлен такой же степени, как и* r.

$\lhd$Разложим h на простейшие дроби:

$$h = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} a_{j,k} q_{\lambda_j,k},$$

то есть

$$h(z) = \frac{a_{1,1}}{z-\lambda_1} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(z-\lambda_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{a_{m,1}}{z-\lambda_m} + \cdots + \frac{a_{m,k_m}}{(z-\lambda_m)^{k_m}},$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ различны, $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$.
По свойствам 6 и 4 действия многочленов от D_0 на рациональные функции для оператора

$$B := (D_0 - \frac{1}{\lambda_1} I)^{k_1} \cdots (D_0 - \frac{1}{\lambda_m} I)^{k_m}$$

$B(h) = 0$ (каждое слагаемое для h обнуляется соответствующим множителем). Поэтому $B(f) = B(r)$.

Для $\mu, t \neq 0$

$$(D_0 - \mu I)(r)(t) = \frac{r(t) - r(0)}{t} - \mu r(t) =: r_1(t).$$

Степень $\frac{r(t)-r(0)}{t}$ строго меньше степени r, а степень $\mu r(t)$ равна степени r. Значит, степени многочленов r_1 и r совпадают.
Значит, степень

$$B(r) := (D_0 - \frac{1}{\lambda_1} I) \cdots (D_0 - \frac{1}{\lambda_1} I) \cdots (D_0 - \frac{1}{\lambda_m} I) \cdots (D_0 - \frac{1}{\lambda_m} I)(x) =: \tilde{r}$$

равна степени r (каждый оператор-множитель степень многочлена сохраняет). ■

Лемма

(о разложении рациональных функций, голоморфных в Ω). *Для любой ненулевой функции $f \in \mathbb{C}(z) \bigcap H(\Omega)$ найдутся многочлены $r = r(f)$, $u = u(f)$, $v = v(f)$ такие, что $deg(u) < deg(v)$, v — унитарный (то есть старший коэффициент v равен 1), v не имеет корней в Ω, многочлены u и v не имеют общих корней и*

$$f = r + \frac{u}{v}.$$

Такое представление единственное.

$\triangleleft$Возьмем $f \in \mathbb{C}(z) \bigcap H(\Omega)$. Выделив целую часть, получим:

$$f = r + \frac{u}{v},$$

где r, u, v — многочлены, $deg(u) < deg(v)$. При этом можно считать, что u и v не имеют общих корней и v унитарный.
Поскольку функция $f - r = \frac{u}{v}$ голоморфна в Ω, то v не имеет корней в Ω.

Единственность: Пусть для многочленов r_1, u_1, v_1 и r_2, u_2, v_2, как в формулировке леммы

$$r_1 + \frac{u_1}{v_1} = r_2 + \frac{u_2}{v_2}.$$

Тогда

$$\frac{r_1 v_1 + u_1}{v_1} = \frac{r_2 v_2 + u_2}{v_2}.$$

При этом числитель и знаменатель и слева, и справа не имеют общих корней. (Действительно, пусть многочлены v_1 и $r_1 v_1 + u_1$ имеют общий корень α, тогда многочлен $u_1 = (r_1 v_1 + u_1) - r_1 v_1$ имеет корень α. Получили противоречие с тем, что многочлены u_1 и v_1 не имеют общих корней.)

Так как в $\mathbb{C}$

$$(r_1v_1 + u_1)v_2 = (r_2v_2 + u_2)v_1,$$

то v_1 и v_2 имеют одно и то же множество корней одной и той же кратности. Поскольку v_1 и v_2 унитарные, то $v_1 = v_2$. Поэтому

$$r_1v_1 + u_1 = r_2v_2 + u_2$$

и

$$v_1(r_1 - r_2) = u_2 - u_1.$$

Значит, $v_1 \Big| u_2 - u_1$. Поскольку

$$deg(u_2 - u_1) < deg(v_1) = deg(v_2),$$

то $u_1 = u_2$ и $r_1 = r_2$. Лемма доказана. ■

Множество полюсов для инвариантного подпространства

Пусть S — собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство $H(\Omega)$. (Тогда $S \subseteq \mathbb{C}(z)$.)

Пусть $\mathcal{P}(S)$ — множество всех корней многочленов $v(f)$, $f \in S \setminus \{0\}$, как в лемме о разложении D_0-инвариантных подпространств:

$$\mathcal{P}(S) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega \big| \exists f \in S \setminus \{0\} : v(f)(\lambda) = 0\}.$$

Для $f = 0$ считаем, что $(0 = 0 + \frac{0}{1})$

$$r(f) = u(f) = 0, \; v(f) = 1.$$

О степенях D_0-инвариантного подпространства

Далее $\mathbb{C}[z]_n$ для $n \geq 0$— множество многочленов над $\mathbb{C}$ степени не выше n; $\mathbb{C}[z]_{-\infty} := \{0\}$.

Лемма

Пусть S — собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство $H(\Omega)$; для $f \in S \setminus \{0\}$ многочлены $r(f)$, $u(f)$, $v(f)$ такие, как в лемме о разложении. Тогда

(i) $n(S) := \sup\limits_{f \in S} deg(r(f)) < +\infty$ *и* $\mathbb{C}[z]_{n(S)} \subseteq S$.

(ii) $\mathcal{P}(S)$ *конечно или пусто.*

(iii) $n_\lambda(S) := \sup\limits_{f \in S} m(\lambda, v(f)) < +\infty$, $\forall \lambda \in \mathcal{P}(S)$, *где* $m(\lambda, v(f))$ — *кратность корня* λ *многочлена* $v(f)$.

$\triangleleft$(i): Прежде всего, $S \subset \mathbb{C}(z)$.
Предположим, что S содержит функцию f, для которой $r(f) \neq 0$.
По лемме об отбрасывании особенностей S содержит многочлен $\tilde{r}$ степени

$$deg(r(f)) =: m \geq 0.$$

Заметим, что

$$deg(D_0^j(\tilde{r})) = m - j, \ 0 \leq j \leq m.$$

Значит, система $\{D_0^j(\tilde{r}) : 0 \leq j \leq m\}$ образует базис в $\mathbb{C}[z]_m$. При этом она содержится в S. Следовательно,

$$\mathbb{C}[z]_m \subseteq S.$$

Покажем, что $\sup\limits_{f \in S} deg(r(f)) < +\infty$. Предположим, что это не так. Тогда существуют функции $f_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$m_n := deg(r(f_n)) \to +\infty.$$

По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{C}[z]_{m_n} \subseteq S.$$

Значит,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[z]_{m_n} = \mathbb{C}[z] \subseteq S.$$

Так как Ω односвязная, то по теореме Рунге замыкание $\mathbb{C}[z]$ в $H(\Omega)$ совпадает с $H(\Omega)$.
Поскольку

$$\mathbb{C}[z] \subseteq S \subseteq H(\Omega),$$

то $S = H(\Omega)$.
Получено противоречие с тем, что S — собственное подпространство $H(\Omega)$.
Если для любой функции $f \in S$ многочлен $r(f)$ нулевой, то $n(S) = -\infty$.
Ясно, что

$$\{0\} = \mathbb{C}[z]_{-\infty} \subseteq S.$$

(ii): Возьмем $\lambda \in \mathcal{P}(S)$. Тогда

$$\exists f \in S : \ v(f)(\lambda) = 0.$$

По утверждению (i) (ведь $deg(r(f)) \leq n(S)$)

$$r(f) \in S.$$

Поэтому

$$\frac{u(f)}{v(f)} = f - r(f) \in S.$$

Пусть теперь $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$ — все различные корни $v(f)$. Тогда $\frac{u(f)}{v(f)}$ — линейная комбинация дробей

$$q_{\lambda,k}, \ 1 \leq k \leq m(\lambda), \ q_{\lambda_l,k_l}, \ 1 \leq k_l \leq m(\lambda_l),$$

где $m(\lambda)$ — кратность корня λ, $m(\lambda_l)$ — кратность корня λ_l многочлена $v(f)$.

По свойству 6 существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что оператор

$$A = (D_0 - \frac{1}{\lambda_1} I)^m (D_0 - \frac{1}{\lambda_2} I)^m \cdots (D_0 - \frac{1}{\lambda_s} I)^m$$

„обнулит“ все слагаемые в этой линейной комбинации, содержащие q_{λ_l, k_l}, $1 \leq l \leq s$, $1 \leq k_l \leq m(\lambda_l)$.

По свойству 5 $A(\frac{u(f)}{v(f)})$ — ненулевая дробь из $Q(\lambda, m(\lambda))$ (ведь линейная комбинация дробей $q_{\lambda,k}$, как выше, ненулевая).
При этом $A(S) \subset S$.

По свойству 7 о просеивании существует оператор $B \in \mathbb{C}[D_0]$:

$$B\Big(A(\frac{u(f)}{v(f)})\Big) = q_{\lambda,1} \ (q_{\lambda,1}(t) = \frac{1}{t - \lambda}).$$

Значит, $q_{\lambda,1} \in S$.

Предположим, что $\mathcal{P}(S)$ бесконечно. Тогда $\mathcal{P}(S)$ имеет предельную точку в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Отсюда следует, что множество $\{q_{\lambda,1} : \lambda \in \mathcal{P}(S)\}$ полно в $H(\Omega)$.

(Почему: берем $g \in H_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Выполняется равенство

$$\langle q_{\lambda,1}, g \rangle = g(\lambda).$$

Если $\langle q_{\lambda,1}, g \rangle = 0 \ \forall \lambda \in \mathcal{P}(S)$, то $g(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \in \mathcal{P}(S)$. Тогда $g \equiv 0$ по теореме единственности для голоморфных функций.
Значит, $\{q_{\lambda,1} : \lambda \in \mathcal{P}(S)\}$ полна в $H(\Omega)$.)

Отсюда следует, что $S = H(\Omega)$. Получили противоречие.

Теорема

(теорема единственности). Если $f \in H(G)$, G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, f обращается в нуль на подмножестве G, имеющем предельную точку в G, то $f \equiv 0$ в G.

(iii): Если $\mathcal{P}(S) = \emptyset$, то $v(f) = 1$ для всех $f \in S$.
Пусть $\mathcal{P}(S)$ непусто. По (ii) $\mathcal{P}(S)$ конечно. Предположим, что

$$\sup_{f \in S} deg(v(f)) = +\infty.$$

Тогда, используя свойства 2–7, получим:

$$\exists \lambda \in \mathcal{P}(S) \; \exists k_n \in \mathbb{N} :$$

$$k_n < k_{n+1}, \; \forall n \in \mathbb{N} : \; q_{\lambda, k_n} \in S.$$

По свойству 7 о просеивании $q_{\lambda,k} \in S$ для любого $k \in \mathbb{N}$.
Поскольку $\{q_{\lambda,k} : k \in \mathbb{N}\}$ полное в $H(\Omega)$ и S замкнуто, то $H(\Omega) = S$.
Получили противоречие.

(Пояснение:
$\langle q_{\lambda,k}, g \rangle = \frac{g^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}$, $\forall k \geq 1$. Если $\langle q_{\lambda,k}, g \rangle = 0$, $\forall k \geq 1$, то $g^{(j)}(\lambda) = 0$, $\forall j \geq 0$. Поэтому $g \equiv 0$.)
■

Замечание

Введем конечное или пустое кратное многообразие, определяемое S:

$$\Upsilon(S) := \{(\lambda, n_\lambda(S)) : \lambda \in \mathcal{P}(S)\}.$$

Для конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$, $n_\lambda \in \mathbb{N}$

$$\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\},$$

$$\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := l(q_{\lambda,k} : \lambda \in \Upsilon, 1 \le k \le n_\lambda).$$

Если $\Lambda = \emptyset$, то $\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \{0\}$.

Теорема

Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, $0 \in \Omega$, $\Omega \neq \mathbb{C}$.

(i) *Следующие множества являются собственными замкнутым D_0-инвариантными подпространствами $H(\Omega)$:*
   - (i1) $\mathbb{C}[z]_n$, $n \geq 0$;
   - (i2) $\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$, *где* Υ *— конечное кратное многообразие в* $\mathbb{C} \setminus \Omega$;
   - (i3) $\mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$, *где* $n \geq 0$ *и* Υ *— конечное кратное многообразие в* $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

(ii) *Любое собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство $H(\Omega)$ совпадает с одним из множеств в (i1)-(i3).*

$\triangleleft$Утверждение (i) следует из свойств 1-7. Замкнутость подпространств в (i1)-(i3) следует из их конечномерности.

(ii): Пусть S — собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство $H(\Omega)$; $n := n(S)$, $\Upsilon := \Upsilon(S)$ — кратное многообразие S.

Покажем, что

$$S = \mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^-_\Upsilon(z).$$

Ясно, что

$$S \subseteq \mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^-_\Upsilon(z).$$

По лемме о степенях D_0-инвариантного подпространства

$$\mathbb{C}[z]_n \subseteq S.$$

Покажем, что $\mathbb{C}^{-}_{\Upsilon}(z) \subseteq S$. Зафиксируем $\lambda \in \mathcal{P}(S)$ (если $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$). Поскольку $\mathbb{C}[z]_n \subseteq S$, то S содержит некоторую функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_j q_{\lambda,j} + \sum_{\nu \in \mathcal{P}(S), \nu \neq \lambda} \sum_{k=1}^{n_\nu} \beta_{\nu,k} q_{\nu,k}, \; \alpha_{n_\lambda} \neq 0.$$

(Пояснение: Любая $h \in S$ представляется в виде

$$h = r + \sum_{j=1}^{n_\lambda} \alpha_j q_{\lambda,j} + \sum_{\nu \in \mathcal{P}(S), \nu \neq \lambda} \sum_{k=1}^{n_\nu} \beta_{\nu,k} q_{\nu,k}, \; \alpha_j, \beta_{\mu,k} \in \mathbb{C}, \alpha_{n_\lambda} \neq 0.$$

По определению n_λ достигается на некоторой функции f, то есть существует $f \in S$: $\alpha_j \neq 0$. Здесь $r \in \mathbb{C}[z]_n$ и $r \in S$. Поэтому $f = h - r \in S$.)

Из свойств 4,6,7 следует, что каждая дробь

$$q_{\lambda,k}, \ \lambda \in \mathcal{P}(S), \ 1 \leq k \leq n_\lambda,$$

принадлежит S, а значит, линейная оболочка $\mathbb{C}^{-}_{\Upsilon}(z)$ этих дробей содержится в S.

Следовательно,

$$\mathbb{C}[z]_n + \mathbb{C}^{-}_{\Upsilon}(z) \subseteq S. \blacksquare$$

Для $\Omega = \mathbb{C}$

Если $\Omega = \mathbb{C}$, то $\mathbb{C} \setminus \Omega = \emptyset$.

Теорема

(i) *$\mathbb{C}[z]_n$, $n \geq 0$, — собственные замкнутые D_0-инвариантные подпространства $H(\mathbb{C})$.*

(ii) *Если S — собственное замкнутое D_0-инвариантное подпространство $H(\mathbb{C})$, то существует $n \geq 0$ такое, что $S = \mathbb{C}[z]_n$.*

Когда D_0 одноклеточный, то есть для любых замкнутых D_0-инвариантных подпространств S_1 и S_2 выполняется вложение $S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$?

Следствие

Оператор D_0 одноклеточный тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{C}$.

Более общая ситуация

Зафиксируем функцию $g_0 \in H(\Omega)$ такую, что $g_0(0) = 1$. Можно определить оператор

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t},$$

линейный и непрерывный в $H(\Omega)$ и описать его циклические векторы и инвариантные подпространства.
Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} — это рассмотренный ранее оператор обратного сдвига D_0.

Ситуация значительно усложняется, если функция g_0 имеет нули в Ω.
В этом случае инвариантными будут и подпространства следующего типа.

Пусть $Z(g_0)$ — (непустое) множество всех нулей g_0, $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$.
Зафиксируем непустое множество $M \subset Z(g_0)$ и числа $k(\mu) \in \mathbb{N}$, для которых $1 \leq k(\mu) \leq n(\mu)$, $\mu \in M$.
Множество

$$S = \{f \in H(\Omega) : f^{(j)}(\mu) = 0,\, \mu \in M,\, 0 \leq j \leq k(\mu) - 1\}$$

является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.

Для других пространств

Инвариантные подпространства и циклические векторы оператора D_0 описаны и для других пространств голоморфных функций. Известные результаты относятся к банаховым пространствам. Одним из первых из них является результат Р. Дугласа, Г. Шапиро, А. Шилдса [6] для пространства Харди $H^2(\mathbb{D})$, где $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для него важным является поведение функций из инвариантных подпространств, циклических векторов вблизи границы $\mathbb{D}$ — окружности $|z| = 1$.

Объединяющим для $H(\Omega)$ и $H^2(\mathbb{D})$ является такой результат:

Пусть функция f голоморфна в круге $|z| < R$ для некоторого $R > 1$. Функция f не является циклическим вектором оператора D_0 в $H^2(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда f является рациональной дробью.

[6] Douglas R.G., Shapiro H.S., Shieds A.L. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1970. V. 20. P. 37–76.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!